

рМинистерство науки и высшего образования
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Донецкий государственный университет»

Факультет математики и информационных технологий
Кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений

ДОКУМЕНТ ПОДПИСАН ЭЛЕКТРОННОЙ ПОДПИСЬЮ

Сертификат 03C1BBABF83E153235592ADEEC463FDD
Владелец МАШАРОВ ПАВЕЛ АНАТОЛЬЕВИЧ
Действителен с 06.07.2026 по 29.09.2027
Должность проректор

УТВЕРЖДАЮ
проректор

_____ П.А. Машаров
«16» апреля 2026 г.
МП

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Углубленная группа направлений подготовки	01.00.00 Математика и механика
Программа высшего образования	Программа бакалавриата
Направление подготовки / Специальность	01.03.01 Математика
Направленность (профиль) образовательной программы	Математика
Квалификация	Бакалавр
Форма обучения	Очная

Рабочая программа может быть адаптирована для лиц
с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

Донецк 2026

Рабочая программа дисциплины **«Вариационное исчисление и методы оптимизации»** для обучающихся по направлению подготовки 01.03.01 Математика (Профиль: Математика), составлена на основании Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования – бакалавриат по направлению подготовки 01.03.01 Математика, утвержденного приказом Министерства образования и науки Российской Федерации от 10 января 2018 г. № 8 (с изм. и доп.), Порядка организации и осуществления образовательной деятельности по образовательным программам высшего образования – программам бакалавриата, программам специалитета, программам магистратуры, утвержденного приказом Министерства науки и высшего образования Российской Федерации от 06 апреля 2021 г. № 245 (с изм. и доп.), в соответствии с учебным планом, утвержденным Ученым советом ФГБОУ ВО «ДонГУ» для набора 2026 года.

Разработчик:

доцент кафедры математического анализа и
дифференциальных уравнений,
канд. физ.-мат. наук, доцент

Д. В. Лиманский

Рабочая программа одобрена на заседании кафедры математического анализа и
дифференциальных уравнений.

Протокол от 14.04.2026 № 8

Заведующий кафедрой

В.В. Волчков

СОГЛАСОВАНО:

Врио декана факультета математики и
информационных технологий
16.04.2026

Н.Е. Мащенко

Учебно-методическая комиссия факультета математики и информационных технологий.

Протокол от 15.04.2026 № 3

Председатель

Ю.В. Абраменкова

Руководитель основной образовательной
программы, д-р физ.-мат. наук, проф.
14.04.2026

В.В. Волчков

1. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ

1.1. Требования к предварительной подготовке обучающихся, предшествующие и сопутствующие дисциплины, на которых основывается изучение данной:

базовая подготовка по математике в объеме программы средней школы;

дисциплины программы бакалавриата: Математический анализ, Алгебра, Дифференциальные уравнения, Уравнения математической физики, Функциональный анализ, Теория меры и интеграла.

Дисциплины, курсовые работы и практики, для которых освоение данной дисциплины необходимо как предшествующее:

Теоретическая механика, Математические модели в естественных науках, Производственная практика: научно-исследовательская работа (обязательная), Производственная практика: преддипломная практика (обязательная).

2. ОПИСАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

2.1. Общая характеристика

Наименование показателя	Значение показателя
Название образовательной программы (далее – ОП)	01.03.01 Математика (Профиль: Математика)
Шифр и название в соответствии с учебным планом	Б1.Б.34. Вариационное исчисление и методы оптимизации
Часть образовательной программы	Базовая часть
Количество зачетных единиц / всего часов	3 / 108

В случае предъявления от обучающегося или его родителя (законного представителя) заявления на обучение по адаптированной образовательной программе высшего образования, подкрепленного заключением психолого-медико-педагогической комиссии (ПМПК) или медико-социальной экспертизы (МСЭ) с рекомендациями создания индивидуальной программы реабилитации и абилитации (ИПРА), данная рабочая программа может быть адаптирована с учетом индивидуальных особенностей здоровья обучающегося.

2.2. Распределение часов по формам и периодам обучения

Форма обучения	курс	семестр	Общее количество часов					Форма контроля
			лекционных	лабораторных	практических	самостоятельной работы + контроль	всего	
Очная	4	8	20	–	20	68	108	зачет

3. ЦЕЛИ ДИСЦИПЛИНЫ

Углубленная подготовка в области вариационного исчисления и методов оптимизации; овладение методами решения основных типов вариационных задач; овладение современным математическим аппаратом для дальнейшего использования в науке и приложениях; формирование у студентов научного подхода.

4. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ КОМПОНЕНТА ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЙ ПРОГРАММЫ, ИХ ИНДИКАТОРЫ И ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ

4.1. Компетенции

ОПК-2. Способен разрабатывать, анализировать и внедрять новые математические модели в современных естествознании, технике, экономике и управлении.

4.2. Индикаторы компетенций

ОПК-2.7. Использует методы построения и анализа математических моделей в задачах естествознания, техники, экономики и управления.

4.3. Результаты обучения

ОПК-2.7.1. Знает принципы построения и анализа математических моделей.

ОПК-2.7.2. Умеет строить и анализировать математическую модель.

ОПК-2.7.3. Умеет применять на практике математические модели и компьютерные технологии.

5. ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Название темы	Краткое содержание темы (вопросы темы)
Раздел 1. Необходимые условия экстремума функционала	1.1. Простейшая задача вариационного исчисления. 1.2. Уравнения Эйлера, Эйлера – Пуассона, Остроградского. 1.3. Задачи на условный экстремум.
Раздел 2. Достаточные условия экстремума функционала	2.1. Исследование квадратичного функционала. 2.2. Уравнение Якоби. 2.3. Критерии экстремума функционала.
Раздел 3. Минимум квадратичного функционала	3.1. Энергетическое пространство. 3.2. Минимум квадратичного функционала.

6. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Форма обучения – очная, курс – 4, семестр – 8

Наименования разделов и тем	Количество часов				
	Лекц.	Лабор.	Практ.	СРС+К	Всего
Раздел 1. Необходимые условия экстремума функционала	10	-	10	20	40
Простейшая задача вариационного исчисления	4	-	4	8	16
Уравнения Эйлера, Эйлера – Пуассона, Остроградского	4	-	4	8	16
Задачи на условный экстремум	2		2	4	8
Раздел 2. Достаточные условия экстремума функционала	6	-	6	24	36
Исследование квадратичного функционала	2	-	2	8	12
Уравнение Якоби	2	-	2	8	12
Критерии экстремума функционала	2		2	8	12
Раздел 3. Минимум квадратичного	4	-	4	24	32

функционала					
Энергетическое пространство	2	-	2	12	16
Минимум квадратичного функционала	2	-	2	12	16
ИТОГО ЗА СЕМЕСТР / ПО КОМПОНЕНТУ ОП	20	-	20	68	108

7. ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ (СРЕДСТВА) ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ

7.1. Контрольные вопросы

Раздел 1. Необходимые условия экстремума функционала

1. Первая вариация функционала. Формула. Необходимое условие экстремума функционала в терминах его первой вариации.
2. Простейшая задача вариационного исчисления. Лемма Лагранжа.
3. Первая вариация интегрального функционала. Формула Эйлера.
4. Нахождение экстремалей функционала, зависящего от нескольких функций. Формула Эйлера – Пуассона.
5. Условный экстремум функционала. Решение изопериметрической задачи.
6. Вторая вариация функционала. Условие Лежандра.

Раздел 2. Достаточные условия экстремума функционала

7. Сопряженные точки. Теорема о необходимых и достаточных условиях положительной определенности квадратичного функционала.
8. Уравнение Якоби. Теорема о достаточных условиях слабого экстремума интегрального функционала.

Раздел 3. Минимум квадратичного функционала

9. Теорема о минимуме квадратичного функционала в энергетическом пространстве. Обобщенное решение операторного уравнения.
10. Расширение по Фридрихсу положительно определенного оператора. Теорема о сохранении нижней грани оператора при его расширении.

7.2. Темы письменных работ (типы задач)

Контрольные работы по практике включают задания указанных типов.

Раздел 1. Необходимые условия экстремума функционала: найти экстремали интегрального функционала, зависящего от одной функции; от нескольких функций; от одной функции и ее производных высшего порядка; найти экстремали интегрального функционала, зависящего от одной функции, с интегральным уравнением связи; с дифференциальным уравнением связи; с конечным уравнением связи.

Раздел 2. Достаточные условия экстремума функционала: найти экстремали интегрального функционала, зависящего от одной функции, и исследовать их на слабый и сильный экстремумы с помощью достаточных условий.

Раздел 3. Минимум квадратичного функционала: найти минимум квадратичного функционала, зависящего от функции, заданной на отрезке; в прямоугольнике; в круге.

Контрольная работа по проверке теоретических знаний – по всем темам, с использованием указанных выше контрольных вопросов.

8. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БАЛЛОВ, КОТОРЫЕ ПОЛУЧАЮТ ОБУЧАЮЩИЕСЯ

Общая оценка знаний обучающихся по дисциплине проводится по 100-балльной шкале исходя из максимума, приведенного в таблице ниже. Организационно-учебная

работа в аудитории оценивается на основе таких критериев как посещаемость занятий, своевременное и качественное выполнение домашних заданий, активность во время проведения лекционных и практических занятий (участие в обсуждении текущего и пройденного материала, решение задач и т.п.).

По результатам работы в семестре обучающийся, набравший не менее 60 баллов, получает зачёт. Те, кого набранные баллы не устраивают, пишут зачётную работу с использованием указанных в п. 7 теоретических и практических заданий.

8.1. Семестр 8

Номера разделов	Виды работ	Максимальное количество баллов
1-3	Организационно-учебная работа в аудитории	5
	Самостоятельная работа	5
	Контрольные работы по практике	45
	Контрольная работа по теоретическому материалу	45
ИТОГО		100
Общий итог за семестр		100

Соответствие баллов оценке

Количество баллов из 100	ECTS	Оценка по пятибалльной шкале	
		Экзамен, дифференцированный зачет	Зачет
90-100	A	отлично	зачтено
80-89	B	хорошо	
75-79	C		
70-74	D		
60-69	E	удовлетворительно	
35-59	FX		
0-34	F	неудовлетворительно	не зачтено

9. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА

Учебные занятия проводятся в Главном корпусе ДонГУ (г. Донецк, пр. Гурова, 6). Для проведения занятий требуется аудитория, оборудованная меловой или маркерной доской, мультимедийный проектор и экран, ноутбук, комплект учебной мебели для студентов, рабочее место преподавателя, выход в Интернет – проводной или с использованием Wi-Fi.

Для самостоятельной работы используются текстовые и электронные ресурсы Научной библиотеки университета и других электронных библиотечных баз данных, учебно-методическое обеспечение, представленное в учебно-методическом кабинете Главного корпуса (ауд.405).

Обучающиеся имеют возможность использовать учебные материалы по дисциплине, размещенные на платформе Moodle Центра дистанционного образования ФГБОУ ВО «ДонГУ». При изучении дисциплины могут применяться электронное обучение и дистанционные образовательные технологии.

С использованием ресурсов платформы дистанционного образования осуществляется текущий контроль знаний обучающихся на основе тестирования и проверки результатов самостоятельной работы.

10. РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

10.1. Основная литература

1. **Лиманский, Д.В.** Вариационное исчисление и методы оптимизации: учебное пособие для студентов направления подготовки 01.03.01 Математика / Д. В. Лиманский; ГОУ ВПО "Донецкий национальный университет". – Донецк: ДонНУ, 2017. – 91 с.

10.2. Дополнительная литература

2. **Гельфанд, И.М.** Вариационное исчисление / И. М. Гельфанд, С. В. Фомин. – М.: Физматгиз, 1961. – 228 с.

11. ИНФОРМАЦИОННЫЕ РЕСУРСЫ

1. **Научная электронная библиотека eLIBRARY.RU:** сайт / НЭБ (ООО). – Москва, 2000- . – URL: <https://elibrary.ru> (дата обращения: 08.04.2026). – Режим доступа: для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.

2. **Научная электронная библиотека «КиберЛенинка»:** сайт / Ассоциация «Открытая наука». – Москва, 2014- . – URL: <https://cyberleninka.ru/> (дата обращения: 08.04.2026). – Режим доступа: свободный. – Текст: электронный.

3. **Национальная подписка:** сайт / РЦНИ. – Москва, 2020- . – URL: <https://podpiska.rcsi.science/> (дата обращения: 08.04.2026). – Режим доступа: для авторизов.пользователей ДонГУ. – Текст: электронный.

4. **Национальная электронная библиотека (НЭБ):** федеральная государственная информационная система / Министерство Культуры РФ; Российская государственная библиотека. – Москва, 2019- . – URL: <https://rusneb.ru/> (дата обращения: 08.04.2026). – Режим доступа: свободный. – Текст: электронный.

5. **Образовательная платформа Юрайт:** сайт. – Москва, 2013- . – URL: <https://urait.ru/library/svobodnyy-dostup/> (дата обращения: 08.04.2026). – Режим доступа: издания свободного доступа, для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.

6. **Электронная библиотека РГБ:** раздел сайта / РГБ. – Текст: электронный // Российская государственная библиотека: официальный сайт. – <https://ldiss.rsl.ru/electroniclibrary>. – Режим доступа: поиск свободный, электронные документы – Виртуальный читальный зал РГБ на территории НБ ДонГУ.

7. **Электронно-библиотечная система Лань:** сайт / ЭБС Лань. – С.-Петербург, 2011- . – URL: <https://e.lanbook.com> (дата обращения: 08.04.2026). – Режим доступа: издания Сетевой электронной библиотеки, для авторизов. пользователей. – Текст: электронный.

8. **Электронно-библиотечная система ДонГУ:** сайт / ФГБОУ ВО «ДонГУ». – Донецк, 2016- . – URL: <http://library.donnu.ru/> (дата обращения: 08.04.2026). – Режим доступа: свободный. – Текст: электронный.

9. **Электронный каталог** Научной библиотеки ДонГУ: раздел сайта / НБ ДонГУ. – Текст: электронный // ЭБС ДонГУ: сайт. – URL: <http://library.donnu.ru/catalog/> (дата обращения: 08.04.2026). – Режим доступа: поиск свободный, электронные документы – для пользователей ДонГУ.

10. **Электронный архив** ДонГУ: раздел сайта / НБ ДонГУ. – Текст: электронный // ЭБС ДонГУ: сайт. – URL: <http://repo.donnu.ru/> (дата обращения: 08.04.2026). – Режим доступа: свободный.

12. ПРОГРАММНОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ

1. РЕД ОС, Astra Linux (OEM).
2. OpenOffice, LibreOffice.